Journal of the Korean Society of Marine Environment & Safety
Research Paper
Vol. 27, No. 1, pp. 193-200, February 28, 2021, ISSN 1229-3431(Print) / ISSN 2287-3341(Online) https://doi.org/10.7837/kosomes.2021.27.1.193

강성응축기법을 이용한 국부 비선형 정적 해석

신한섭* · 오민한** · 부승환***†
* 한국해양대학교 대학원 석사과정, ** 현대중공업 운항구조연구실 책임연구원,
*** 한국해양대학교 조선·해양시스템공학과 교수

Local Nonlinear Static Analysis via Static Condensation

Han-Seop Shin* · Min-Han Oh** · Seung-Hwan Boo***†
* Master Course, Naval Architecture and Ocean Systems Engineering, Korea Maritime & Ocean University, Busan, Republic of Korea
** Senior Researcher, Load and Response Research Department, Hyundai Heavy Industries, Seoul, Republic of Korea
*** Professor, Naval Architecture and Ocean Systems Engineering, Korea Maritime & Ocean University, Busan, Republic of Korea

요 약 : 본 연구에서는 국부 비선형 정적 해석을 효율적으로 수행하기 위하여 강성응축(Static condensation)을 활용한 해석기법을 제시하였다. 강성응축기법은 자유도 기반의 유한요소 모델 축소기법이며, 해석 모델을 관심 대상(Target) 부분과 응축되어 생략될(Omitted) 부분으로 구분한다. 본 연구에서는, 관심 대상 부분에는 비선형 영역, 생략될 부분에는 선형 영역으로 지정하였고, 선형 영역에 대응되는 강성 행렬 및 하중 벡터를 비선형 영역, 즉 관심 대상 부분으로 모두 응축하였다. 모델 응축 후에는 비선형 영역에 대한 강성 행렬 및 하중 벡터만으로 이루어진 축소 모델을 구성하였으며, 이 축소 모델만을 뉴턴-랩슨 반복(Newton-Raphson iteration)을 통해 갱신하여 효율적으로 비선형 해석을 수행하였다. 끝으로, 제안된 기법을 다양한 수치 예제에 적용하여 해석기법의 효율성과 신뢰성을 제시하였다.

핵심용어 : 유한요소법, 국부 정적 해석, 강성응축기법, 비선형 해석, 뉴턴-랩슨 반복

Abstract : *In this study, an analysis technique using static condensation is proposed for an efficient local nonlinear static analysis. The static condensation method is a model reduction method based on the degrees of freedom, and the analysis model is divided into a target part and a condensed part to be omitted. In this study, the nonlinear and linear parts were designated to the target and the omitted parts, respectively, and both the stiffness matrix and load vector corresponding to the linear part were condensed into the nonlinear part. After model condensation, the reduced model comprising the stiffness matrix and the load vector for the nonlinear part is constructed, and only this reduced model was updated through the Newton-Raphson iteration for an efficient nonlinear analysis. Finally, the efficiency and reliability of the proposed analysis technique were presented by applying it to various numerical examples.*

Key Words : *Finite element method, Local static analysis, Static condensation method, Nonlinear analysis, Newton-Raphson iteration*

1. 서 론

유한요소법(Bathe et al., 1984)은 전산 상에 이산화(Discretization)된 유한요소모델(Finite element model)을 통해 실제 구조물의 응답을 예측하며, 복잡한 구조시스템의 합리적인 근사치를 얻기 위해서는 일반적으로 많은 자유도(Degrees of freedom)가 필요하다. 특히 선박 및 해양 구조물 해석은 고려해야 할 하중 Case가 상당히 많으며, 설계 최적화를 위한 재해석 과정, 비선형 해석을 위한 반복 근사 과정까지 고려한다면 유한요소 모델의 특성과 목적은 유지하되 자유도 크기를 줄여 한정된 전산 비용을 효율적으로 사용할 필요가 있다(Boo, 2019).

한편 실제 설계에서는 특정 부위에 대한 변위 및 응력 이력 평가가 주를 이룬다는 점을 상기한다면, 전체 자유도의 결과를 도출하기보다는 관심 부(Local)의 결과만을 도출하는 모델 축소기법(Model reduction method)을 이용하는 것이 효율적이다. 모델 축소기법은 모델의 전체 자유도를 각각 생략된 부분(Omitted part)과 대상 부분(Target part)으로 행렬 순열(Matrix permutation) 및 Partitioning 한 후 간단한 행렬 연산을 통해 자유도를 축소, 국부 해석한다(Boo and Oh, 2017). 이를

* First Author : zkstps@g.kmou.ac.kr, 051-410-4934
† Corresponding Author : shboo@kmou.ac.kr, 051-410-4305

통해 전체 모델을 해석하지 않고도 관심 영역의 해석 결과를 얻을 수 있으며 자유도의 개수를 줄임으로써 가장 직관적이고 확실하게 전산 비용을 줄이는 방법이다. 정적 해석을 위한 자유도 기반 모델 축소기법은 강성응축기법(Wilson, 1974)이 대표적이다. 강성응축기법은 Guyan(1965)의 질량, 강성응축기법에서 관성 효과를 무시하고 강성만 응축함으로써 정확한 정적 해석 솔루션을 얻을 수 있으며 Improved reduced system(IRS) 기법(O 'Callahan, 1989), Iterative 기법(Friswell et al., 1995; Xia and Lin, 2004), The component mode synthesis (CMS) 기법(Craig and Bampton, 1968; MacNeal, 1971)과 같은 여러 동적 모델축소기법의 초석으로도 사용되었다.

또한, 반복적인 유한요소모델 해석과정에서 설계 변경마다 전체 모델의 강성 행렬과 힘 벡터를 구성하고 방정식을 풀어 변위를 구하는 과정을 되풀이하는 것은 비효율적이라는 점을 개선하기 위해, 축소 모델을 사용한 구조 재해석 기법(Boo, 2019)이 개발되었다. 축소 모델 재해석 기법은 유한요소 모델을 설계 변경이 수시로 발생하는 부분(Target part)과 축소되어 제거될 부분(Omitted part)으로 구분하여 자유도를 축소, 설계 변경 발생 시 발생 부분만을 갱신(Updating)하여 재해석을 수행한다.

본 연구는 유한요소법 기반의 정적 축소기법과 축소 모델 재해석 기법을 이용하여 반복 근사 과정으로 인해 많은 시간과 전산 비용이 필요한 비선형 해석을 비선형 영역(Target part)만 갱신하여 효율적으로 수행하는 핵심 아이디어를 소개하고, 제안된 기법을 수치 예제에 적용하여 축소 모델 비선형 해석기법의 성능을 보여 주었다.

2. 선형 정적 해석

본 장에서는 유한요소법(Finite element method)을 이용한 선형 정적 해석 방정식의 유도과정을 서술한다. 유한요소 이론은 무한한 자유도(DOFs, Degrees of freedom)를 가진 연속체 구조물을 이산화(Discretization) 과정을 통해 유한개의 자유도를 갖는 유한요소(Finite element)로 모델링 하여 해를 구하는 방법이다.

유한요소법의 변위(Displacement)와 변형률(Strain)은 연속체 역학(Continuum mechanics)을 기반으로 정의되며, 응력(Stress)은 외력이 작용할 때 구조물의 표면 또는 내부에서 힘의 평형(Equilibrium of force)을 만족하기 위해 작용하는 힘으로, 물체의 Momentum balance를 만족한다. 이를 방정식으로 나타내면 다음과 같이 표면과 내부의 힘의 평형에 관련된 2개의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\tau_{ij,j} + f_i^B = 0 \ \ in \ \ V \ , \ \ \tau_{ij,j} \cdot n_j = f_i^S \ \ in \ \ S_f \tag{1}$$

여기서, 아래 첨자 i, j 는 텐서 형식(Tensor form)의 1st order와 2nd order를 의미한다. τ 는 응력 요소를 나타내며, f^S 와 f^B 는 각각 구조물의 표면 S_f 과 부피 V 에 적용된 하중 벡터(Force vector), n 은 접선 벡터(Tangent vector)를 의미한다. 식(1)의 방정식들은 각각 탄성체 모델의 내부와 외부 힘의 평형을 나타낸 방정식이다.

유한요소해석은 강체 운동을 피하고자 경계 조건(Boundary condition)이 필요하며 이에 관한 식으로 물체 표면 변위 호환성(Compatibility) 식을 얻을 수 있다.

$$u_i = u_i^{S_u} \ \ on \ \ S_u \tag{2}$$

여기서, u_i 는 변위 요소, S_u 는 경계 조건 표면적, $u_i^{S_u}$ 는 경계 조건에서의 변위를 의미하며, 호환성 방정식의 경계 조건 변위는 항상 0이다.

마지막으로 Stress-Strain law에 의해 응력과 변형률 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3}$$

여기서, $\mathbf{C}$ 는 강성 텐서(Stiffness tensor), $\boldsymbol{\tau}$ 는 응력 벡터(Stress vector), $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 변형률 벡터(Strain vector)이다.

앞서 식(1), (2), (3)에서 얻은 방정식들은 유한요소해석의 해를 구하는 데 필요한 방정식들이며, 이를 강형(Strong form)이라고 한다. 강형을 이용해 해를 구하면 자유도에 따라 수많은 미지수를 갖는 연립방정식을 풀어야 하지만 가상 일법칙(Principal of virtual work)을 이용한다면 이를 하나의 방정식으로 풀 수 있다. 이는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\int_V \tau_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} dV = \int_{S_f} f_i^S \delta u_i dS + \int_V f_i^B \delta u_i dV \tag{4}$$

여기서, δu 는 가상변위(Virtual displacement), $\delta\varepsilon$ 는 가상 변형률(Virtual strain)이다. 식(4)의 좌 항은 내부 가상일, 우 항은 외부 가상 일을 나타내며, 내 외부 힘의 평형을 나타낸다.

식(2)의 경계 조건을 통해 지배방정식을 만족하는 가상변위와 실제 변위(Real displacement)를 도출하기 위한 내부 요소 m 의 내부 m 변위 장(Internal displacement field)과 내부 변형률 장(Internal strain field)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)}\mathbf{U} \tag{5a}$$

$$\mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m)}\mathbf{U} \tag{5b}$$

여기서, $\mathbf{H}$ 와 $\mathbf{B}$ 는 각각 변위 보간 행렬(Displacement interpolation matrix)과 변형률 보간 행렬(Strain interpolation matrix), $\mathbf{U}$ 는 노드 변위 벡터(Nodal displacement vector)이다.

가상 일 법칙에서 응력은 식(3)의 Hooke's law를 이용하여 강성 텐서와 변형률의 곱으로 나타내며 가상변위 벡터와 가상 변형률 벡터 또한 식(5)에서 사용된 보간 행렬과 같은 행렬을 사용하여 정의된다. 이를 이용해 식(4)의 좌 항과 우 항은 각각 식(6)과 (7)로 표현할 수 있다.

$$\delta\mathbf{U}^T\left[\sum_m\int_{V^{(m)}}\mathbf{B}^{(m)T}\mathbf{C}\mathbf{B}^{(m)}dV^{(m)}\right]\mathbf{U} \tag{6}$$

$$\delta\mathbf{U}^T\left[\sum_m\int_{V^{(m)}}\mathbf{H}^{(m)T}f_B^{(m)}dV^{(m)}+\sum_m\int_{V^{(m)}}\mathbf{H}^{(m)T}f_S^{(m)}dS^{(m)}\right] \tag{7}$$

여기서, $f_B^{(m)}$와 $f_S^{(\mathrm{m})}$는 각각 내력 벡터(Internal force vector), 외력 벡터(External force vector)를 의미한다.

이때 내부 가상변위 장(Internal virtual displacement field)이 1의 물리량을 가진다고 가정하면 다음과 같이 정적평형 방정식을 정의할 수 있다.

$$\mathbf{KU}=\mathbf{F}$$

$$\text{with}\quad \mathbf{K}=\left[\sum_m\int_{V^{(m)}}\mathbf{B}^{(m)T}\mathbf{C}\mathbf{B}^{(m)}dV^{(m)}\right], \qquad \mathbf{F}=\left[\sum_m\int_{V^{(m)}}\mathbf{H}^{(m)T}f_B^{(m)}dV^{(m)}+\sum_m\int_{V^{(m)}}\mathbf{H}^{(m)T}f_S^{(m)}dS^{(m)}\right] \tag{8}$$

식(8)에서 $\mathbf{K}$는 강성 행렬을 의미하고, $\mathbf{U}$와 $\mathbf{F}$는 각각 변위 벡터와 힘 벡터를 의미한다.

3. 비선형 정적 해석

유한요소 모델에 외력이 가해졌을 때 발생하는 응력이 재료의 항복점(Yield point)을 넘지 않을 경우, 응력과 변형률의 관계를 나타내는 그래프는 선형적으로 증가하며 이때 함수의 기울기를 탄성계수(Young's modulus)라고 한다. 반면에, 항복점보다 강한 응력에 의해 영구변형이 발생하여 응력-변형률 곡선의 기울기가 탄성 영역과 달라지는 구간을 소성 영역이라고 한다.

본 연구에서는 비선형 유한요소 방정식을 풀기 위해 가장 널리 사용되는 반복 근사 기법인 뉴턴-랩슨 기법(Newton-Raphson method)을 사용한다(Bathe et al., 1984; Dvorkin and Bathe, 1984). 뉴턴 랩슨 반복은 소성 응력이 발생하였을 때, 내외부 힘이 평형할 때까지 내력과 변위를 반복하여 근사한다(Friswell et al., 1995).

요소 응력에 대응하는 노드 힘 벡터(Nodal force vector)가 외력 벡터와 일치하는 유한요소 평형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{R}^*-\mathbf{F}=\mathbf{0} \tag{9}$$

여기서, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{F}$ 는 각각 외력 벡터(External force vector), 내력 벡터(Internal force vector)이며 비선형 해석에서 내력 벡터는 노드 변위(Node displacement)에 비선형적으로 의존하기 때문에 다음과 같은 반복 근사 과정이 필요하다.

$$\mathbf{R}^*-\mathbf{F}^{(i-1)}=\Delta\mathbf{R}^{(i-1)} \tag{10}$$

여기서, 윗 첨자 i는 반복 횟수를 뜻하며 식(10)을 변위-힘 그래프에 대입하면 다음과 같은 변위증분(Displacement increment) 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)}=\mathbf{R}^*-\mathbf{F}^{(i-1)} \tag{11}$$

여기서, $\mathbf{K}$, $\Delta\mathbf{U}$는 각각 접선 강성 행렬(Tangential stiffness matrix)과 증가 변위 벡터(Incremental displacement vector)를 의미하며 접선 강성 행렬은 힘-변위 그래프를 변위에 대해 미분하여 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}^{(i-1)}=\left[\frac{\delta\mathbf{F}}{\delta\mathbf{U}}\right]\Bigg|_{\mathbf{U}^{(i-1)}} \tag{12}$$

또한, 증가 변위 벡터는 반복 횟수가 증가함에 따라 계속해서 갱신되어 변위 벡터에 더해지며

$$\mathbf{U}^{(i)}=\mathbf{U}^{(i-1)}+\Delta\mathbf{U}^{(i)} \tag{13}$$

반복 근사의 극한에서는 식(9)의 유한요소 평형을 만족하는 강성 행렬과 변위 벡터가 계산된다. 앞서 서술한 비선형 정적 해석의 뉴턴 랩슨 반복 과정은 아래 Fig. 1과 같다.

탄소성(Elastoplastic) 해석에서, 식(3)의 응력-변형률 관계는 다음과 같이 증분 형식으로 새롭게 나타낼 수 있다.

$$d\boldsymbol{\tau}=\mathbf{C}(d\boldsymbol{\varepsilon}^{total}-d\boldsymbol{\varepsilon}^{p}) \tag{14}$$

여기서, $d\boldsymbol{\varepsilon}^{total}$와 $d\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$은 각각 총 변형률 증분(Total strain increment)과 소성 변형률 증분(Plastic strain increment)이며, $d\boldsymbol{\tau}$는 응력 증분(Stress increment)을 의미한다.

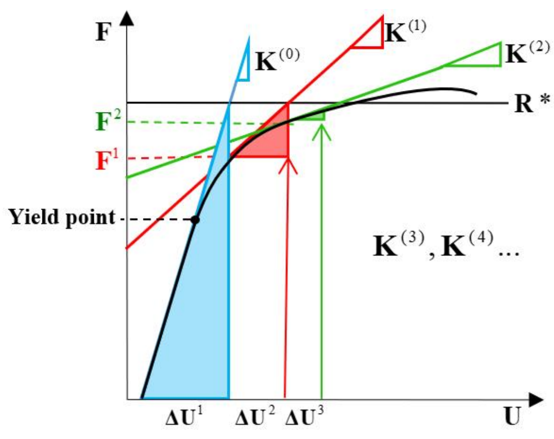

Fig. 1. Newton-Rabshon iteration for nonlinear stiffness analysis.

4. 강성응축 기법을 활용한 비선형 해석

유한요소모델은 엔지니어의 의사결정에 의해 해석 대상 영역(Target part)과 축소되어 제거될 부분(Omitted part)으로 구분할 수 있으며, Node 번호를 이용한 간단한 행렬 순열(Matrix permutation) 기법과 부분행렬 화(Matrix partitioning) 기법을 이용하면 식(8)의 정적평형 방정식을 다음과 같이 새롭게 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_o & \mathbf{K}_{ot} \\ \mathbf{K}_{ot}^T & \mathbf{K}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_o \\ \mathbf{U}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_o \\ \mathbf{F}_t \end{bmatrix} \tag{15}$$

여기서, 아래 첨자 o와 t는 각각 Omitted part와 Target part를 의미하며 ot는 두 항의 결합 된 항을 의미한다.

이때 식(15)의 1, 2번째 행을 전개하면 다음과 같으며

$$\mathbf{U}_o = \mathbf{\Psi U}_t + \mathbf{K}_o^{-1}\mathbf{F}_o \quad \text{with} \quad \mathbf{\Psi} = -\mathbf{K}_o^{-1}\mathbf{K}_{ot} \tag{16}$$

$$\mathbf{K}_{ot}^T\mathbf{U}_o + \mathbf{K}_t\mathbf{U}_t = \mathbf{F}_t \tag{17}$$

여기서, 식(16)의 $\mathbf{\Psi}$는 Constraint mode matrix(Craig and Bampton, 1968; Craig and Hale, 1988)를 나타낸다.

이때 식(16), (17)를 식(15)에 대입하면 간단한 행렬 계산을 통해 다음과 같은 축소된 행렬과 벡터로 이루어진 방정식으로 나타낼 수 있으며

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{F}}_t \end{bmatrix} \tag{18}$$

마지막으로, 방정식의 $\mathbf{0}$ 행렬을 제거하면 아래와 같은 축소 정적평형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{U}_t = \hat{\mathbf{F}} \quad \text{with} \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_{ot}^T\mathbf{\Psi}, \;\; \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_t + \mathbf{\Psi}^T\mathbf{F}_o \tag{19}$$

앞서 강성응축기법을 통해 축소된 축소 정적평형 방정식의 강성 행렬과 힘 벡터는 각각 다음과 같이 간소화하여 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_t + \bar{\mathbf{K}} \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{ot}^T\mathbf{\Psi} \tag{20a}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_t + \bar{\mathbf{F}} \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{F}_o \tag{20b}$$

여기서, the over-bar $\bar{\ }$는 Target part를 제외한 나머지 축소 행렬 또는 벡터 항을 의미한다.

축소 모델 재해석 기법(Boo, 2019)에서는 축소 모델 행렬이 Target part와 Omitted part의 간단한 덧셈으로 표현된다는 점을 이용한다. Fig. 2와 같이 Omitted part는 축소 후 경계 영역(Boundary term)에 적용하여 재사용(Re-using)하며, 국부 해석 영역은 갱신(Updating)되어 설계 변경이 적용된 새로운 축소 모델을 구성한다.

따라서, 설계 변경이 적용된 축소 강성 행렬과 힘 벡터는 아래와 같이 표현할 수 있으며

$$\hat{\mathbf{K}}^{New} = \mathbf{K}_t^{New} + \bar{\mathbf{K}} \tag{21a}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^{New} = \mathbf{F}_t^{New} + \bar{\mathbf{F}} \tag{21b}$$

식(19)의 축소 방정식은 아래와 같이 재정의된다.

$$\hat{\mathbf{K}}^{New}\mathbf{U}_t^{New} = \hat{\mathbf{F}}^{New} \tag{22}$$

여기서, 위 첨자 New는 설계 변경이 적용되었음을 나타낸다.

본 연구에서는, 앞서 설명한 축소 모델 재해석 절차가 축소된 국부 모델의 강성과 힘을 갱신할 수 있다는 점을 이용하여, 축소 모델의 강성 행렬과 힘 벡터를 갱신함으로써 반복 근사 비선형 정적 해석을 수행한다.

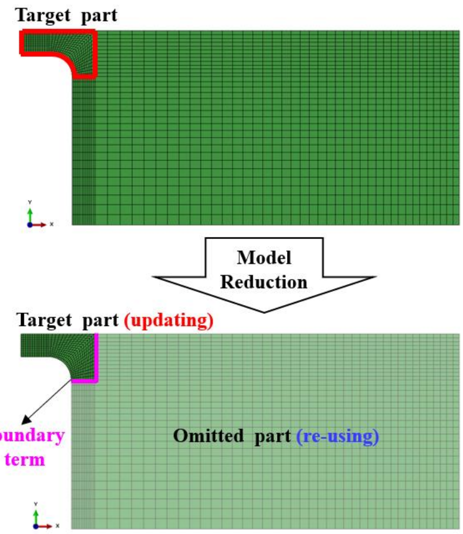

Fig. 2. Concept of reduced model reanalysis.

정적축소된 유한요소 모델 해석에서 힘의 평형은 다음과 같은 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{F}}^* - \mathbf{F}_t^{(i-1)} = \mathbf{0} \tag{23}$$

여기서, $\hat{\mathbf{F}}^*$, $\mathbf{F}_t^{(i-1)}$는 각각 축소된 외력 벡터(Reduced external force vector)와 Target part의 내력 벡터(Internal force vector)이며, 식(11)의 변위증분 방정식은 다음과 같이 Target part의 변위증분 방정식으로 새롭게 표현할 수 있다.

$$(\mathbf{K}_t^{(i-1)} + \bar{\mathbf{K}})\Delta\mathbf{U}_t^{(i)} = \hat{\mathbf{F}}^* - \mathbf{F}_t^{(i-1)} \tag{24}$$

접선 강성 행렬과 변위 벡터 또한 아래와 같이 Target part에 대한 방정식으로 다시 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} = \left[\frac{\delta\mathbf{F}_t}{\delta\mathbf{U}_t}\right]_{\mathbf{U}_t^{(i-1)}} \tag{25}$$

$$\mathbf{U}_t^{(i)} = \mathbf{U}_t^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}_t^{(i)} \tag{26}$$

앞서 3장과 마찬가지로, 축소 모델 반복 근사의 극한에서는 식(23)의 유한요소 평형을 만족하는 강성 행렬과 변위 벡터를 얻을 수 있으며, 강성응축 과정을 포함한 비선형 해석 절차는 Fig. 3과 같다.

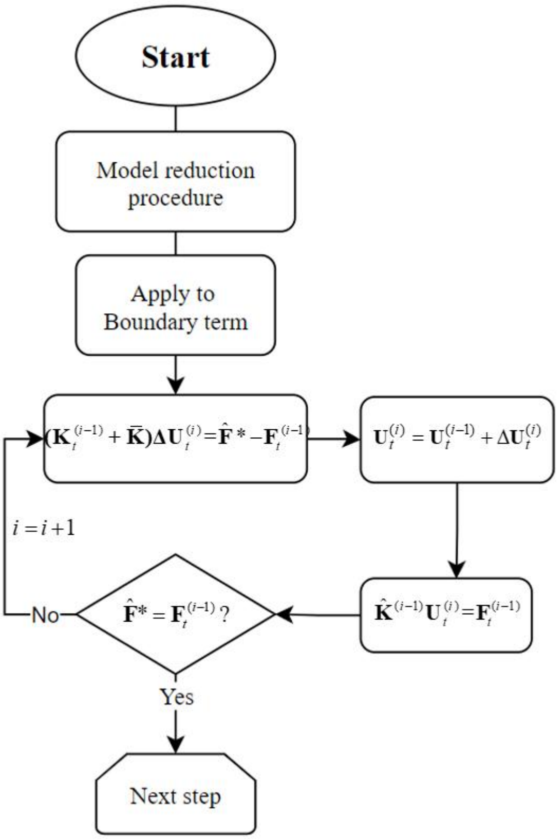

Fig. 3. Nonlinear static analysis procedure using reduced model.

본 연구에서는 선형 영역에 해당하는 모델을 축소하였기 때문에 모든 비선형 해석은 Target part에서만 발생한다. 따라서, 축소 모델의 내부 요소 m의 내부 변위 장과 내부 변형률 장은 다음과 같이 표현할 수 있으며

$$\mathbf{U}_t^{(m)}=\mathbf{H}^{(m)}\mathbf{U}_t \tag{27a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t^{(m)}=\mathbf{B}^{(m)}\mathbf{U}_t \tag{27b}$$

여기서, 증분 형식의 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$d\boldsymbol{\tau}_t=\mathbf{C}(d\boldsymbol{\varepsilon}_t^{total}-d\boldsymbol{\varepsilon}_t^{p}) \tag{28}$$

5. 수치 예제

제안된 방법의 성능을 검증하기 위한 수치 예제의 강성행렬과 힘 벡터 모델링 및 구조 해석은 상용 FE 해석 software인 ABAQUS를 이용하였다. 유한요소 모델을 축소하여 축소 모델을 구성하는 과정은 MATLAB 기반의 Static condensation code를 사용하였으며 계산된 축소 모델은 ABAQUS의 MATRIX INPUT 기능을 통해 모델의 경계 영역에 적용하여 축소 모델 해석을 수행하였다.

본 연구에서는 해석 결과의 정확도 비교를 위해, 전체 모델 해석 결과 변위 벡터와 축소 모델 해석 결과 변위 벡터의 L_2-norm(Euclid norm)을 비교하였다. L_2-norm의 비교는 행렬 크기 비교를 위해 널리 쓰이는 방법으로, 아래와 같이 행렬 벡터 내적 값을 비교함으로써 행렬 크기를 비교한다.

$$\|\mathbf{U}_r\|_2=\sqrt{\sum_i (\mathrm{u}_i^r)^2} \tag{29}$$

또한, 예제의 전체 모델 해석과 축소 모델 해석 시간을 측정하여 비교함으로써 제안된 기법의 전산 시간효율을 검증하였으며, 수치 예제의 축소비율을 제시하기 위해 수치 예제로 사용한 Hatch corner plate 모델과 Barge 모델의 전체 DOFs 수와 축소된 모델의 DOFs 수를 Table 1에 나타내었다.

Table 1. Comparison of the number of global and reduced model DOFs of numerical examples

Model	Model DOFs		Reduction ratio [%]
	Full model	Reduced model (Target part)	
Hatch corner plate	13050	3330	25.51
Barge	362783	9666	2.66

5.1 Hatch corner plate problem

본 예제는 아래 Fig. 4와 같이 B = 57.6 mm, H = 25.4 mm, 두께 t = 2 mm인 평판에 반지름 3 mm의 아치와 길이 6.6 mm의 돌출부를 가지는 자유도 13050개의 Hatch corner plate를 Shell element로 모델링 하여 구조적 불연속 부에 국부 압력 하중이 적용되는 정적 해석을 수행하였다.

또한, 유한요소 모델에 사용된 Shell 요소 타입은 ABAQUS의 S4, 재질은 연철을 사용하였으며 물성값으로 탄성계수 E는 206000 MPa, Poisson's Ratio는 0.3, 소성해석을 위한 Yield stress는 373.5 MPa로 설정하였다.

압력 하중은 돌출부에 선형 탄성 변형이 발생하는 10 MPa과 소성 영역 변형이 발생하는 50 MPa을 각각 선형 하중 조건, 비선형 하중 조건으로 구분하여 적용하였다. 하중이 적용된 돌출부 전체를 Target part로 지정하였으며 경계 조건은 평판의 위아래 끝단에 적용된다. 선형 해석과 비선형 해석의 결과 응력을 Figs. 5, 6에 전체 모델과 축소 모델을 함께 제시하였다.

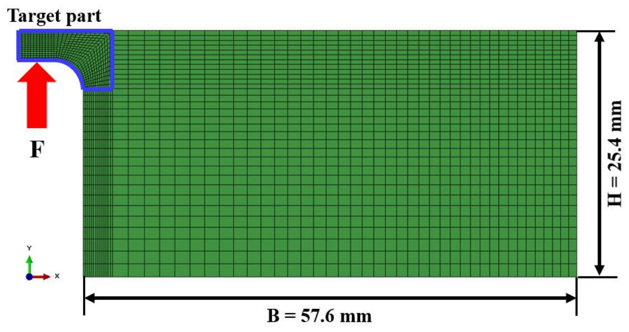

Fig. 4. Shell plate model for linear & nonlinear static analysis.

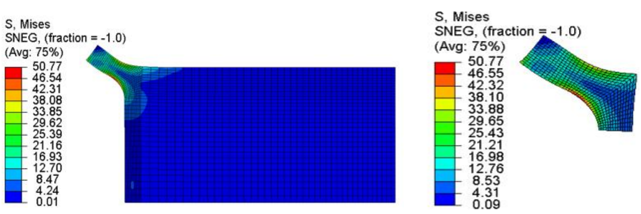

Fig. 5. Linear static analysis stress results of global and reduced model (scale: 1000).

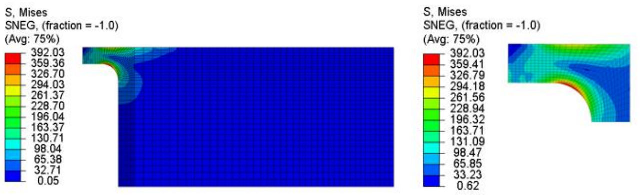

Fig. 6. Nonlinear static analysis stress results of global and reduced model (scale: 1).

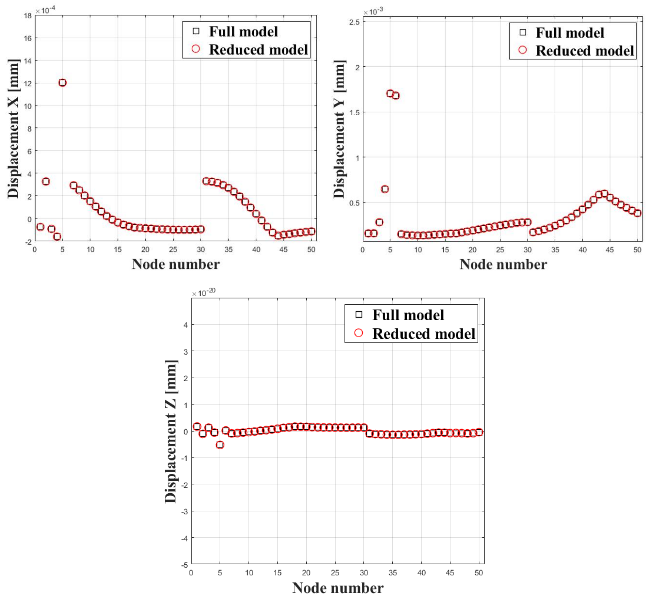

Fig. 7. XYZ coordinate error check of linear static analysis displacement results (DOFs #: 50).

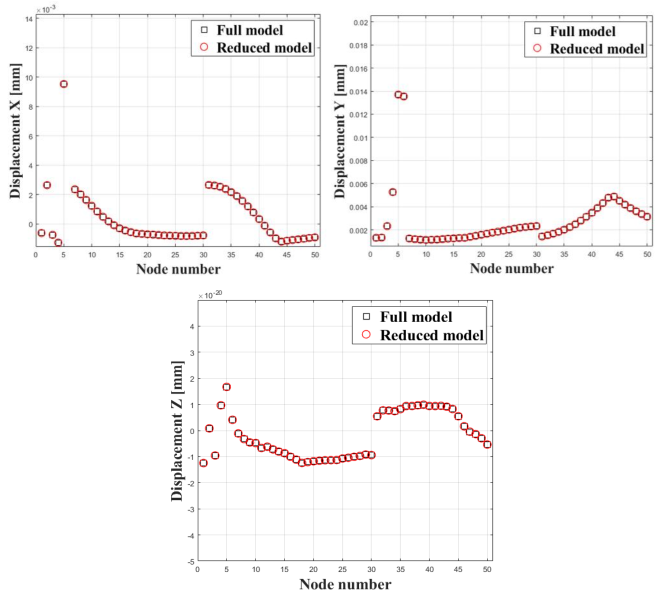

Fig. 8. XYZ coordinate error check of nonlinear static analysis displacement results (DOFs #: 50).

본 예제는 선형 해석과 비선형 해석 모두 같은 모델을 사용하였기 때문에 최초 모델축소 과정을 통해 제작된 축소 모델을 반복적으로 재사용하여 해석을 수행하였다. 전체 모델과 축소 모델의 국부 영역(Target part) 해석 결과 변위를 X, Y, Z 자유도 별로 Figs. 7, 8에서 비교 하였으며 L_2-norm 값을 Table 2에서 검토하였다(Boo et al., 2016).

또한, 제안된 기법의 전산 효율을 검증하기 위해 전체 모델의 해석 시간과 축소 모델의 해석 시간을 해석 조건별로 Table 3을 통해 각각 비교하였다.

Table 2. Displacement matrix norm for the error check

Method	L_2-norm value		Error [%]
	Full model	Reduced model	
Linear case	0.0445	0.0445	0
Nonlinear case	0.3540	0.3540	0

Table 3. Computation time of each static analysis cases

Method	Model		Time ratio [%]
	Full model	Reduced model	
Linear static analysis	0.0643	0.03537	55.01%
Nonlinear static analysis	2.30	1.01	43.91%

5.2 Large barge problem

제안된 기법의 대형구조물 해석 효율을 검토하기 위해 아래 Fig. 9와 같이 길이 L = 12.45 m, 폭 B = 3 m, 높이 H = 0.99 m의 자유도는 362783개를 가지는 Barge 구조물을 Shell element로 모델링 하여 정중앙 Deck에 국부 압력 하중이 적용되는 정적 해석을 수행한다.

또한, 유한요소 모델에 사용된 Shell 요소 타입은 ABAQUS의 S4, 재질은 판 부재 알루미늄 5083H321, 보강재 알루미늄 6061T6을 사용하였으며 물성값 탄성계수 E = 68900 MPa, 70300 MPa을 적용하였으며 밀도 ρ 는 2660 kg/m^3, 2700 kg/m^3, Poisson's Ratio는 0.3을 각각 적용하였다. 또한, 소성해석을 위한 Yield stress는 241 MPa로 설정하였다. 압력 하중은 Barge의 Deck 중앙 부에 0.2 MPa을 적용하였으며 경계 조건은 Barge의 양 끝단에 적용하였다. 비선형 해석 결과 응력을 Fig. 10에 전체 모델과 축소 모델을 함께 제시하였다.

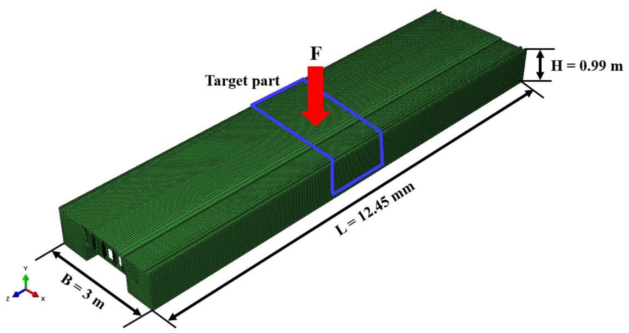

Fig. 9 Barge model for nonlinear static analysis.

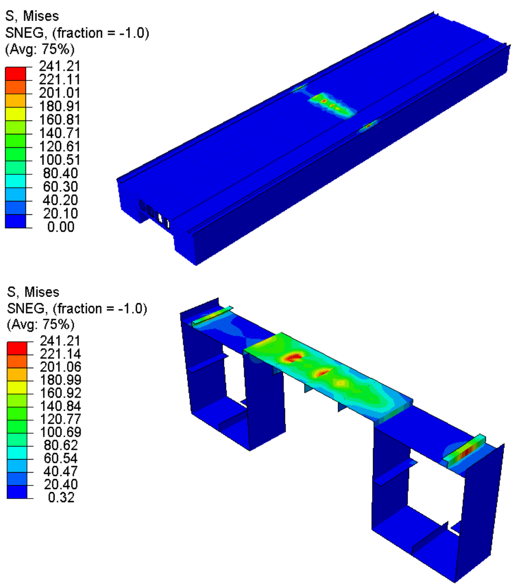

Fig 10. Global and reduced model nonlinear static analysis stress results (scale: 1).

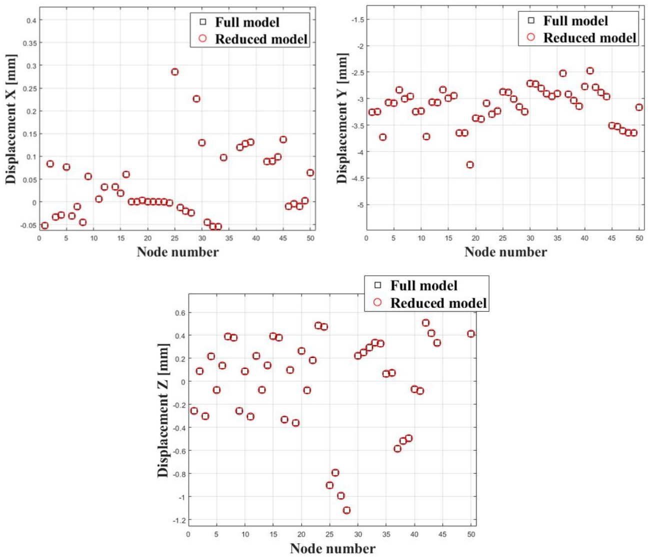

Fig. 11. XYZ coordinate error check of nonlinear static analysis displacement results (DOFs # : 50).

앞선 예제와 마찬가지로 전체 모델과 축소 모델의 국부 영역(Target part) 해석 결과 변위를 비교하였다. Fig. 11에서 X, Y, Z 자유도 별로 비교하였으며 L_2-norm 값은 Table 4에서 검토하였다.

또한, 제안된 기법의 전산 시간효율을 검증하기 위해 전체 모델의 비선형 정적 해석 시간과 축소 모델의 비선형 정적 해석 시간을 Table 5를 통해 비교하였다.

Table 4. Displacement matrix norm for the error check

Method	L_2-norm value		Error [%]
	Full model	Reduced model	
Nonlinear case	143.1861	143.1861	0

Table 5. Computation time of nonlinear static analysis

Method	Model		Time ratio [%]
	Full model	Reduced model	
Nonlinear static analysis	189	8	4.23%

6. 결 론

본 연구에서는 강성응축기법을 활용하여 비선형 해석을 효율적으로 수행하는 해석기법을 제안하였다. 제안된 기법의 효율성을 검증하기 위해 Hatch corner plate 구조물과 대형

Barge 구조물을 정적 축소하여 축소 모델 선형, 비선형 해석을 수행하고 전체 모델 해석 결과와 비교하여 검토하였다.

축소 모델 국부 정적 선형 해석의 경우 전체 모델 해석보다 2배가량, 비선형 해석의 경우 최대 23배가량 빠르게 계산할 수 있었다. 특히 비선형 해석은 해석에 필요한 정량적인 시간이 훨씬 크기 때문에 더 효율적이며 축소 과정에 근사 과정이 없어 해석의 정확도가 보장된다는 점도 중요하다.

이 연구에서 제안한 축소 모델 해석기법을 바탕으로 기존 Static condensation 기법을 이용한 축소를 대형구조물의 정적 축소에 특화된 축소기법인 Algebraic multi-level substructuring 기반의 Automated static condensation 기법으로 개선하여 축소 시간을 단축하고, 사용성 개선 및 축소 시간 단축을 위해 FORTRAN으로 구성된 ABAQUS의 Subroutine 모듈화 관련 연구가 필요하다.

마지막으로, 엔지니어링 실무에서의 제안된 기법 성능 검증을 위해 수백만 개 이상의 자유도를 가지는 실제 구조물을 축소 모델 해석하여 결과를 비교할 필요가 있다.

후 기

이 논문은 2020년 대한민국 교육부와 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2019R1C1C1004159). 또한, 이 논문은 2020년도 산업통상자원부의 ‘창의산업융합 특성화 인재양성사업’의 지원을 받아 연구되었음(과제번호 N0000717).

References

[1] Bathe, K. J., E. N. Dvorkin, and M. Kojic(1984), On the Solutions of nonlinear finite element equations, Pineridge Press, pp. 289-299

[2] Boo, S. H.(2019), Structural modal reanalysis using automated matrix permutation and substructuring, Structural Engineering and Mechanics, 69(1), pp. 105-120

[3] Boo, S. H. and M. H. Oh(2017), Automated static condensation method for local analysis of large finite element models, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 61, No. 6, pp. 807-816

[4] Boo, S. H., J. G. Kim, and P. S. Lee(2016), A simplified error estimator for the Craig-Bampton method and its application to error control, Comput. Struct., 164, pp. 53-62.

[5] Craig, R. R. and M. C. C. Bampton(1968), Coupling of substructures for dynamic analysis, AIAA J., 6(7), pp. 1313-1319.

[6] Craig, R. R. and A. L. Hale(1988), Block-Krylov component synthesis method for structural model reduction, AIAA Journal, 11(6), pp. 562-70.

[7] Dvorkin, E. N. and K. J. Bathe(1984), A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, Engineering with Computers, 1(1), pp. 77-88.

[8] Friswell, S. D., M. I. Garvey, and J. Penny(1995), Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques, Journal of Sound and Vibration, 186(2), pp. 311-323.

[9] Guyan, J.(1965), Reduction of stiffness and mass matrices, R. AIAA, Journal 3, pp. 380-380

[10] MacNeal, R. H.(1971), Hybrid method of component mode synthesis, Comput. Struct., 1(4), 581-601.

[11] O’Callanhan, J.(1989), A procedure for an improved reduced system (IRS) model, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, USA, February.

[12] Wilson, E. L.(1974), The static condensation algorithm, International Journal for numerical methods in Engineering, Vol. 8(1), pp. 198-203.

[13] Xia, Y. and R. Lin(2004), A new iterative order reduction (IOR) method for eigensolutions of large structures, Int. J. Numer. Meth. Eng., 59, 153-172.

Received : 2021. 02. 01.
Revised : 2021. 02. 17.
Accepted : 2021. 02. 25.